

円周率とグレゴリー級数

茨城県立日立第一高等学校 市毛雄翔, 金丸葵, 徳永望来, 平塚諒多

1. 研究背景

円周率への興味から、それに関する公式を調べていたところ、arctan系公式と呼ばれるものをいくつか見つけた。それぞれ収束の速さが違うため、求めるための計算の量が違うという。私たちはそれらの公式を比較して、一番精度の高い公式を見つけようと思った。

2. 実験方法

グレゴリー級数

$$\tan^{-1} x = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{2k+1} x^{2k+1} = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 \dots$$

ここで、

$$f_n(x) = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{2k+1} x^{2k+1} \quad (n \text{ は自然数})$$

$$f_n(x) = \tan^{-1} x$$

$f_n(x)$ において、 n を1,2,3...と大きくして行き、円周率の小数第10位までの値である 3.1415926535 と初めて一致した n の値を調べる。このときの値が小さいほど精度が高いと定義する。

比較した公式は以下の4つである。

ライプニッツの公式

$$\frac{\pi}{4} = \tan^{-1} 1$$

マチンの公式

$$\frac{\pi}{4} = 4 \tan^{-1} \frac{1}{5} - \tan^{-1} \frac{1}{239}$$

オイラーの公式

$$\frac{\pi}{4} = 5 \tan^{-1} \frac{1}{7} + 2 \tan^{-1} \frac{3}{79}$$

シュテルメル

$$\frac{\pi}{4} = 6 \tan^{-1} \frac{1}{8} + 2 \tan^{-1} \frac{1}{57} + \tan^{-1} \frac{1}{239}$$

3. 実験結果

表1 arctan 系公式を n 項目まで計算した小数第10位までの値

項数 (n)	ライプニッツ	マチン	オイラー	シュテルメル
1	4	3.1832635983	3.1832611832	3.1570872788
2	2.6666666667	3.1405970293	3.1405970297	3.1414477810
3	3.4666666667	3.1416210293	3.1416210293	3.1415942688
4	2.8952380952	3.1415917721	3.1415917721	3.1415926339
5	3.3396825397	3.1415926824	3.1415926824	3.1415926538
6	2.9760461760	3.1415926526	3.1415926526	3.1415926535
7	3.2837384837	3.1415926536	3.1415926536	3.1415926535
8	3.0170718171	3.1415926535	3.1415926535	3.1415926535
...	...			
119	3.1499958666			

■ : 小数第2位まで一致 ■ : 小数第10位まで一致

初めて小数第10位まで一致する n の値が最も小さかったのはシュテルメル

4. 考察

表2 arctan系公式とその成立時期

公式名	成立時期
ライプニッツの公式	15世紀(マーダヴァ), 18世紀(ライプニッツ)
マチンの公式	1706年(マチン)
オイラーの公式	1748年(オイラー)
シュテルメル	1896年(シュテルメル)

上の表より、年代を追うごとに公式の精度は高くなると考えていたが、一部予想に反してマチンの公式とオイラーの公式にはあまり差が出ないという結果になった。これはどちらも2項の式であることが起因していると考えられる。逆に、この二つの公式とライプニッツの公式、シュテルメル

5. まとめ

arctan系公式の精度は、成立時期の違いによるものではなく、公式を成立させている項数の違いによるものだと予想される。しかし、項数の違いが公式の精度に影響している理由については調べることができなかった。今後は、比較する公式の数を増やし、公式の精度に項数がどのように関係しているのか関係があるのかを調べたい。

6. 参考文献